ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, Exame Época Normal **07 . 06. 16**

1ª Parte - Teórica – 30 minutos

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

231475

Nome:____**Número:**_________

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*.

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω. Sabe-se que se A ocorre, B não ocorre.

	V	F
A e B podem ser elementos de uma partição do espaço de resultados.	X	
$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - P(A) \,.\, P(B)$		X
$P(A - B) < P(A)$		X
$P(A\|B) = P(A)$		X

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$

	V	F
Se X é uma variável aleatória discreta, $a, c \in D_X,\ a < c \Rightarrow P(a < X < c) = F(c) - F(a)$		X
Se X é mista e $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória discreta	X	
Se X é uma variável contínua então a respectiva função densidade de probabilidade tem sempre domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0,1]$		X
Se X é discreta, $\forall\, h > 0, x \in \mathbb{R}$ tem-se $F_X(x) \leq P(X \leq x + h)$	X	

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$.

	V	F
Seja $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos de X e Y. Se $M_X(s) = M_Y(s)$, então $F_X(x) = F(y)$.	X	
Seja $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, variáveis aleatórias representando o número de ocorrências, respectivamente, nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = (0,2]$ e $\Delta t_2 = (3,5]$. Então a variável aleatória $W = X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P[X < a] = 0.3 \Rightarrow a < \mu$	X	
Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, as variáveis X e Y são independentes.		X

4. Considere uma amostra casual $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, obtida de uma população X.

	V	F
Se a média da população não for conhecida então a média amostral não é uma estatística.		X
Se $X \sim Po(\lambda)$ então. $E(\bar{X}) = n\,\lambda$.	X	
A variância da média da amostra é inferior à variância da população.	X	
$F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [F_X(x)]^n$ se $x_i = x \quad i = 1, 2, \cdots, n$	X	

VIRE SE FAZ FAVOR

Atenção: **Das seguintes 3 questões** **responda apenas a 2** **(Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].**
Nas questões que se seguem, formalize e justifique todos os passos.

5. Sejam A, B acontecimentos do espaço de resultados Ω. Recorrendo aos axiomas e propriedades da medida da probabilidade, **demonstre** que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

$$\underbrace{A \subset \Omega}_{5} \Rightarrow pela\ \underbrace{propriedade\ 5\ tem-se\ P(A) \leq P(\Omega)}_{5}\ e\ \underbrace{pelo\ axioma\ 2\ P(\Omega) = 1}_{5} \Rightarrow P(A) \leq 1$$

6. Seja X uma variável aleatória. Prove, **usando a definição de variância**, que: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$. **[Cotação: 15]**

$$\overbrace{\boldsymbol{Var(X) = E(X-\mu_X)^2}}^{definição\ de\ variância\ (5)} = \overbrace{\underbrace{\boldsymbol{E\left(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2\right)}}_{2.5} = \underbrace{\boldsymbol{E(X^2) - 2\,\underbrace{E(X)\mu_X}_{*} + \mu_X^2}}_{2.5}}^{valor\ esperado\ da\ soma\ é\ igual\ à\ soma\ dos\ valores\ esperados}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{E(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2}}_{2.5}$$

$$* \ \boldsymbol{-valor\ esperado\ do\ produto\ de\ uma\ constante\ por\ uma\ variável}$$
$$\boldsymbol{= produto\ da\ constante\ pelo\ valor\ esperado\ da\ variável\ (2.5)e\ \ \mu_X\ é\ uma\ constante.}$$

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição de Bernoulli. Encontre a distribuição da amostra. **[Cotação: 15]**

$$\overbrace{\underbrace{f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2) * \cdots * f_{X_n}(x_n)}_{porque\ x_i\ (i=1,2,\cdots,n)\ sendo\ elementos\ de\ uma\ amostra\ casual\ são\ independentes(2.5)}}^{2.5} =$$

$$= \underbrace{\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} * \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} * \cdots * \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}}_{5} =$$

$$= \underbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{5}$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, Exame Época Normal **07 . 06. 16**

1ª Parte - Teórica – 30 minutos 232475

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*.

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω. Sabe-se que os acontecimentos A e B podem ocorrer simultaneamente.

	V	F
A e B podem ser elementos de uma partição do espaço de resultados.		X
$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - [P(A) + P(B)]$		X
$P(A - B) \leq P(A)$	X	
Se $P(A\|B) = P(A)$, então A e B são acontecimentos independentes.	X	

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$

	V	F
Se X é uma variável aleatória contínua, $a, c \in \mathbb{R},\ a < c \Rightarrow P(a \leq X \leq c) = F(c) - F(a)$	X	
Se X é discreta e $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória mista		X
Se X é uma variável discreta então a respectiva função probabilidade tem domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0,1]$	X	
Se X é contínua, $\forall\, h > 0, x \in \mathbb{R}$ tem-se $F_X(x) \leq P(X \leq x + h)$	X	

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$.

	V	F
Se $F_X(x) = F_Y(y)$ e $M_X(s)$, $M_Y(s)$ são as funções geradoras de momentos de X e Y. Então $M_X(s) = M_Y(s)$.	X	
Seja $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, variáveis aleatórias representando o número de ocorrências, respectivamente, nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = (0,3]$ e $\Delta t_2 = (3,5]$. Então a variável aleatória $W = X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P[X > a] = 0.3 \Rightarrow a < \mu$		X
Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, as variáveis X e Y são dependentes.		X

4. Considere uma amostra casual $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, obtida de uma população X.

	V	F
Se a variância da população não for conhecida então a variância da amostra não é uma estatística.		X
Se $X \sim Po(\lambda)$ então $Var(\bar{X}) = \lambda$**.**	X	
O valor esperado da variância da amostra igual à variância da população		X
$f_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [f_X(x)]^n$ se $x_i = x \quad i = 1, 2, \cdots, n$	X	

VIRE SE FAZ FAVOR

Atenção: Das seguintes 3 questões responda apenas a 2 (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].
Nas questões que se seguem, formalize e justifique todos os passos.

5. Sejam A, B acontecimentos do espaço de resultados Ω. Recorrendo aos axiomas e propriedades da medida da probabilidade, **demonstre** que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

6. Seja X uma variável aleatória. Prove, **usando a definição de variância**, que: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$. **[Cotação: 15]**

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição de Bernoulli. Encontre a distribuição da amostra. **[Cotação: 15]**

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, Exame Época Normal **07 . 06. 16**

1ª Parte - Teórica – 30 minutos

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

233475

Nome:____**Número:**_________

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*.

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω. Sabe-se que se A ocorre, B não ocorre.

	V	**F**
A e B não podem constituir uma partição do espaço de resultados.		X
$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - [P(A) + P(B)]$	X	
$P(A - B) = P(A)$	X	
$P(B\|A) = 0$	X	

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$

	V	**F**
Se X é uma variável aleatória discreta, $a, c \in D_X,\ a < c \Rightarrow P(a \le X < c) = F(c) - F(a)$		X
Se X é mista e $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória contínua		X
Se X é uma variável contínua então a respectiva função densidade de probabilidade tem domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0, +\infty)$	X	
Se X é discreta, $\forall\ h > 0, x \in \mathbb{R}$ se tem $F_X(x) = P(X \le x + h)$		X

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$.

	V	**F**
Seja $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos de X e Y. Se $M_X(s) = M_Y(s)$, então $F_X(x) = F(y)$.	X	
Seja $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, variáveis aleatórias representando o número de ocorrências, respectivamente, nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = (3, 10]$ e $\Delta t_2 = (3, 5]$. Então a variável aleatória $W = X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P[X > a] = 0.7 \Rightarrow a < \mu$	X	
Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se as variáveis X e Y são dependentes, então $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.		X

4. Considere uma amostra casual $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \ge 2$, obtida de uma população X.

	V	**F**
Se a média da população não for conhecida então a média amostral não é uma estatística.		X
Se $X \sim Po(\lambda)$ então. $E(\bar{X}) = \lambda/n$.		X
O valor esperado da média da amostra é inferior à média da população.		X
$F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [F_X(x)]^n$ se $x_i = x \quad i = 1, 2, \cdots, n$	X	

VIRE SE FAZ FAVOR

<u>Atenção</u>: Das seguintes 3 questões <u>responda apenas a 2</u> (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].
Nas questões que se seguem, formalize e justifique todos os passos.

5. Sejam A, B acontecimentos do espaço de resultados Ω. Recorrendo aos axiomas e propriedades da medida da probabilidade, **demonstre** que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

6. Seja X uma variável aleatória. Prove, **usando a definição de variância**, que: $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$. **[Cotação: 15]**

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição de Bernoulli. Encontre a distribuição da amostra. **[Cotação: 15]**

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, Exame Época Normal **07 . 06. 16**

1ª Parte - Teórica – 30 minutos 234475

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*.

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω. Sabe-se que os acontecimentos A e B podem ocorrer simultaneamente.

	V	F
A e B não podem constituir uma partição do espaço de resultados.		X
$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$	X	
$P(A - B) = P(A)$		X
Se $A \subset B$, $P(B\|A) = 1$.	X	

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$

	V	F
Se X é uma variável aleatória contínua, $a, c \in \mathbb{R}$, $a < c \Rightarrow P(a \le X \le c) = F(c) - F(a)$	X	
Se X é contínua e $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória mista	X	
Se X é uma variável discreta então a respectiva função distribuição tem domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0, 1]$	X	
Se X é contínua, $\forall\, h > 0, x \in \mathbb{R}$ se tem $F_X(x) = P(X \le x + h)$		X

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$.

	V	F
Se $F_X(x) = F_Y(y)$ e $M_X(s)$, $M_Y(s)$ são as funções geradoras de momentos de X e Y. Então $M_X(s) = M_Y(s)$.	X	
Seja $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, variáveis aleatórias representando o número de ocorrências, respectivamente, nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = (3, 5]$ e $\Delta t_2 = (5, 8]$. Então a variável aleatória $W = X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P[X < a] = 0.7 \Rightarrow a < \mu$		X
Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se as variáveis X e Y são independentes, então $E(X.Y) \neq E(X).E(Y)$,.		X

4. Considere uma amostra casual $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \ge 2$, obtida de uma população X.

	V	F
Se a variância da população não for conhecida então a variância da amostra não é uma estatística.		X
Se $X \sim Po(\lambda)$ então.$Var(\bar{X}) = \boldsymbol{\lambda/n}$.	X	
$E(S^2) < E(S'^2)$	X	
$f_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [f_X(x)]^n$	X	

VIRE SE FAZ FAVOR

Atenção: Das seguintes 3 questões responda apenas a 2 (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].
Nas questões que se seguem, formalize e justifique todos os passos.

5. Sejam A, B acontecimentos do espaço de resultados Ω. Recorrendo aos axiomas e propriedades da medida da probabilidade, **demonstre** que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

6. Seja X uma variável aleatória. Prove, **usando a definição de variância**, que: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$. **[Cotação: 15]**

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição de Bernoulli. Encontre a distribuição da amostra. **[Cotação: 15]**

231475

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	2 c) (15)	3a.(10)	4.a) (10)	T:
1b.(20)	2b.(20)		3b.(15)	4.b) (15)	P:

1. Optimus Alive lançou uma campanha com preços especiais para bilhetes de um, dois e três dias. Das pessoas que aproveitaram esta campanha, 40% compraram bilhetes de um dia, 35% de dois dias e os restantes bilhetes de 3 dias. Entre os compradores, 65% tem menos de 25 anos. A percentagem de bilhetes de um e dois dias por eles comprados é respectivamente de 50 % e 30%.

a) Um comprador seleccionado ao acaso comprou um bilhete de um dia. Calcule a probabilidade de ter menos de 25 anos.

$D_1 - compra\ de\ bilhetes\ de\ um\ dia;\ D_2 - compra\ de\ bilhetes\ de\ 2\ dias;\ D_3 - compra\ de\ bilhetes\ de\ 3\ dias$

$A - ter\ menos\ de\ 25\ anos$

$P(D_1) = 0.4;\ P(D_2) = 0.35;\ P(D_3) = 1 - [P(D_1) + P(D_2)] = 0.25;$

$P(A) = 0.65;\ P(D_1|A) = 0.5;\ P(D_2|A) = 0.30$

$$P(A|D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(D_1)} = \frac{P(D_1|A) * P(A)}{P(D_1)} = \frac{0.5 * 0.65}{0.4} = 0.8125$$

b) Seleccionou-se uma **amostra casual** de 50 compradores que aproveitaram esta campanha. Qual o valor máximo para a **proporção amostral** de compradores de bilhetes de um dia com uma probabilidade de 90%?

$$a =?: P(\bar{X} \le a) = 0.9;\ \bar{X} \dot{\sim} N\left(\theta; \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right) \Rightarrow a = invnorm\left(-1000, a, 0.4, \sqrt{\frac{0.4*0.6}{50}}\right) = 0.4888$$

ou

$$a =?: P(\bar{X} \le a) = 0.9; \bar{X} \dot{\sim} N\left(\theta; \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} \le a) = P\left(\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \le \frac{a - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4*0.6}{50}}}\right) = P\left(Z \le \overbrace{\frac{a - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4*0.6}{50}}}}^{z_\varepsilon}\right) = 0.9$$

$P(Z \le z_\varepsilon) = 0.9 \Rightarrow P(Z > z_\varepsilon) = 0.1$ e **Da tabela 5 vem** $z_\varepsilon = 1.282 \Leftrightarrow \frac{a-0.4}{\sqrt{\frac{0.4*0.6}{50}}} = 1.282 \Leftrightarrow a = 0.4888$

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em **centenas** de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em **centenas** de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = kx^2y \ \ (0 < x < 1;\ \ 0 < y < 2)$$

a) Prove que $k = 1.5$.

$$k\text{:} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^2 kx^2ydydx = k\int_0^1 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = k\int_0^1 2x^2dx = 2k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

b) Determine a função distribuição da variável aleatória $W = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{2}x^2y\,dy = \frac{3}{2}x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 3x^2 \quad (0 < x < 1)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x 3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = x^3 & 0 < x < 1 \\ & x \geq 1 \end{cases}$$

$$A_{W=-1} = \{x\colon w = -1\} = \left\{x\colon x < \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow P(W = -1) = P\left(X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$A_{W=1} = \{x\colon w = 1\} = \left\{x\colon x \geq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow P(W = 1) = P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < -1 \\ 1/8 & -1 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

c) Sabendo que o comerciante <u>vendeu</u> a mercadoria a 150 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante <u>comprou</u> a mercadoria?

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2y\,dx = \frac{3}{2}y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}y \quad (0 < y < 2)$$

$$E(X|Y = 15) = \int_0^1 x * f_{X|Y=15}(x)dx = \int_0^1 x * \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int_0^1 x * \frac{\frac{3}{2}x^2y}{\frac{1}{2}y}dx = \int_0^1 3x^3\,dx =$$

$$= 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} = 0.75 \underline{\Rightarrow} \textit{preço médio por tonelada é igual a } 75 \textit{ euros}$$

3. No fabrico de placas de vidro produzem-se bolhas que se distribuem pela superfície da placa de acordo com um processo de Poisson de intensidade média igual a 0.4 bolhas por m^2.

a) Qual a probabilidade de numa placa com 4.5 m^2, haver pelo menos duas bolhas?

0.2694 ☐ 0.7025 ☐ 0.5372 X 0.7322 ☐

b) Determine a probabilidade de, num conjunto de 6 placas com 4.5 m^2, haver no máximo quatro com uma bolha só.

$Y -$ número de placas com 4.5 m^2, em 6, com uma bolha só $\sim B(6; P(Y=1))$

$X -$ número de bolhas numa placa com 4.5 $m^2 \sim Po\left(\overbrace{4.5 * 0.4}^{1.8}\right)$

$\Rightarrow P(X=1) = Popdf(1{,}1.8) = 0{,}2975 \approx 0{,}3$ (*)

$$P(Y \leq 4) = bincdf(6,*,4) = \begin{cases} 0.9895\ (valor\ exacto) \\ 0.9891\ (fazendo\ \theta = 0.3) \end{cases}$$

4. A duração de um bloco publicitário, em minutos, num canal privado de televisão segue uma distribuição Exponencial de média 10 minutos. Admite-se independência entre a duração de blocos publicitários.

a) Qual a probabilidade de um bloco publicitário aleatoriamente seleccionado durar mais de 10 minutos.

0.4724 ☐ 0.6065 ☐ 0.3679 X 0.2231 ☐

b) Qual a probabilidade de, num programa com 3 blocos publicitários, a duração total da publicidade durar mais de 50 minutos?

$$Y - tempo\ total\ , em\ horas, de\ duração\ dos\ 3\ blocos \sim G\left(3, \frac{1}{10}\right)$$

$$P(Y > 50) = P\left(2 * \lambda * Y > 2 * \frac{1}{10} * 50\right) = P\left(\chi^2_{(6)} > 10\right) = 0.1247$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal **07 . 06. 16**

2ª Parte – Prática – 90 minutos

232475

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	2 c) (20)	3a.(10)	4.a) (10)	T:
1b.(20)	2b.(15)		3b.(10)	4.b) (20)	P:

1. Optimus Alive lançou uma campanha com preços especiais para bilhetes de um, dois e três dias. Das pessoas que aproveitaram esta campanha, 40% compraram bilhetes de um dia, 35% de dois dias e os restantes bilhetes de 3 dias. Entre os compradores, 65% tem menos de 25 anos. A percentagem de bilhetes de um e dois dias por eles comprados é respectivamente de 50 % e 30%.

a) Um comprador seleccionado ao acaso comprou um bilhete de um dia. Calcule a probabilidade de ter menos de 25 anos.

b) Seleccionou-se uma **amostra casual** de 50 compradores que aproveitaram esta campanha. Qual o valor máximo para a proporção amostral de compradores de bilhetes de um dia com uma probabilidade de 90%?

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em **centenas** de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em **centenas** de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = kx^2y \ \ (0 < x < 1; \ \ 0 < y < 2)$$

a) Prove que $k = 1.5$.

b) Determine a função distribuição da variável aleatória $W = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

c) Sabendo que o comerciante <u>vendeu</u> a mercadoria a 150 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante <u>comprou</u> a mercadoria?

3. No fabrico de placas de vidro produzem-se bolhas que se distribuem pela superfície da placa de acordo com um processo de Poisson de intensidade média igual a 0.4 bolhas por m^2.

a) Qual a probabilidade de numa placa com 5 m^2, haver pelo menos duas bolhas?

0.5940 X 0.3233 ☐ 0.5372 ☐ 0.7293 ☐

b) Determine a probabilidade de, num conjunto de 6 placas com 5 m^2, haver no máximo quatro com uma bolha só.

4. A duração de um bloco publicitário, em minutos, num canal privado de televisão segue uma distribuição Exponencial de média 10 minutos. Admite-se independência entre a duração de blocos publicitários.

a) Qual a probabilidade de um bloco publicitário aleatoriamente seleccionado durar mais de 15 minutos.

0.4724 ☐ 0.3679 ☐ 0.6065 ☐ 0.2231 X

c) Qual a probabilidade de, num programa com 3 blocos publicitários, a duração total da publicidade durar mais de 50 minutos?

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal **07 . 06. 16**

2ª Parte – Prática – 90 minutos

233475

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	2 c) (15)	3a.(10)	4.a) (10)	T:
1b.(20)	2b.(20)		3b.(15)	4.b) (15)	P:

1. Optimus Alive lançou uma campanha com preços especiais para bilhetes de um, dois e três dias. Das pessoas que aproveitaram esta campanha, 40% compraram bilhetes de um dia, 35% de dois dias e os restantes bilhetes de 3 dias. Entre os compradores, 65% tem menos de 25 anos. A percentagem de bilhetes de um e dois dias por eles comprados é respectivamente de 50 % e 30%.

   a) Um comprador seleccionado ao acaso comprou um bilhete de um dia. Calcule a probabilidade de ter menos de 25 anos.

   b) Seleccionou-se uma **amostra casual** de 50 compradores que aproveitaram esta campanha. Qual o valor máximo para a **proporção amostral** de compradores de bilhetes de um dia com uma probabilidade de 90%?

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em **centenas** de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em **centenas** de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = kx^2y \;\; (0 < x < 1; \;\; 0 < y < 2)$$

a) Prove que $k = 1.5$.

b) Determine a função distribuição da variável aleatória $W = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

c) Sabendo que o comerciante <u>vendeu</u> a mercadoria a 150 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante <u>comprou</u> a mercadoria?

3. No fabrico de placas de vidro produzem-se bolhas que se distribuem pela superfície da placa de acordo com um processo de Poisson de intensidade média igual a 0.4 bolhas por m^2.

a) Qual a probabilidade de numa placa com 5.5 m^2, haver pelo menos duas bolhas?

0.7319 ☐ 0.6454 X 0.7562 ☐ 0.3773 ☐

b) Determine a probabilidade de, num conjunto de 6 placas com 5.5 m^2, haver no máximo quatro com uma bolha só.

4. A duração de um bloco publicitário, em minutos, num canal privado de televisão segue uma distribuição Exponencial de média 10 minutos. Admite-se independência entre a duração de blocos publicitários.

a) Qual a probabilidade de um bloco publicitário aleatoriamente seleccionado durar mais de 5 minutos.

0.4724 ☐ 0.6065 X 0.3679 ☐ 0.2231 ☐

b) Qual a probabilidade de, num programa com 3 blocos publicitários, a duração total da publicidade durar mais de 50 minutos?

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal **07 . 06. 16**

2ª Parte – Prática – 90 minutos

234475

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	2 c) (15)	3a.(10)	4.a) (10)	T:
1b.(20)	2b.(20)		3b.(15)	4.b) (15)	P:

1. Optimus Alive lançou uma campanha com preços especiais para bilhetes de um, dois e três dias. Das pessoas que aproveitaram esta campanha, 40% compraram bilhetes de um dia, 35% de dois dias e os restantes bilhetes de 3 dias. Entre os compradores, 65% tem menos de 25 anos. A percentagem de bilhetes de um e dois dias por eles comprados é respectivamente de 50 % e 30%.

a) Um comprador seleccionado ao acaso comprou um bilhete de um dia. Calcule a probabilidade de ter menos de 25 anos.

b) Seleccionou-se uma **amostra casual** de 50 compradores que aproveitaram esta campanha. Qual o valor máximo para a **proporção amostral** de compradores de bilhetes de um dia com uma probabilidade de 90%?

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em **centenas** de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em **centenas** de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = kx^2y \ \ (0 < x < 1; \ \ 0 < y < 2)$$

a) Prove que $k = 1.5$.

b) Determine a função distribuição da variável aleatória $W = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

c) Sabendo que o comerciante <u>vendeu</u> a mercadoria a 150 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante <u>comprou</u> a mercadoria?

3. No fabrico de placas de vidro produzem-se bolhas que se distribuem pela superfície da placa de acordo com um processo de Poisson de intensidade média igual a 0.4 bolhas por m^2.

a) Qual a probabilidade de numa placa com 6 m^2, haver pelo menos duas bolhas?

0.6916 X 0.4303 ☐ 0.7387 ☐ 0.7823 ☐

b) Determine a probabilidade de, num conjunto de 6 placas com 5.5 m^2, haver no máximo quatro com uma bolha só.

4. A duração de um bloco publicitário, em minutos, num canal privado de televisão segue uma distribuição Exponencial de média 10 minutos. Admite-se independência entre a duração de blocos publicitários.

a) Qual a probabilidade de um bloco publicitário aleatoriamente seleccionado durar mais de 7.5 minutos.

0.4724 X 0.6065 ☐ 0.3679 ☐ 0.2231 ☐

b) Qual a probabilidade de, num programa com 3 blocos publicitários, a duração total da publicidade durar mais de 50 minutos?